Introdução ao estudo de função

por José Carlos M. Araujo

Vamos estudar um dos conceitos mais importantes da Matemática: o conceito de função. Você certamente já tem algum conhecimento sobre isso, faz parte do nosso vocabulário, mas precisamos apresentá-lo com a linguagem que a Matemática o trata.

Vejamos. Você quando compra alguma coisa, você o faz em função do que precisa, em função de quanto tem disponível no bolso, em função do preço que estão praticando, em função do que o mercado te oferece. Você compra em função de uma necessidade. Comprar é função de muitas variáveis.

Sua nota em uma prova é função do número de questões que você acerta, que é função do quanto você estudou, que depende do grau de dificuldade da prova, do quanto você se dedicou ou compreendeu das aulas e de muitas outras variáveis.

Você deve escutar nos noticiários que a cotação do dólar varia, em função da oferta e da procura (oferta e demanda), como qualquer produto comercializado. O que significa que quando há dólar demais em circulação, o valor do dólar diminui; quando há pouco no mercado, o dólar fica mais concorrido por quem compra e vende, e a cotação sobe.

Repare que o conceito de função inclui a noção de que o comportamento de uma variável depende do comportamento de outras variáveis. Esse é o aspecto que queremos ressaltar, e que caracteriza uma função: a relação de dependência de uma variável em relação à outras(s).

Tentemos outros exemplos que nos aproximar de nossa prática de sala de aula:

- a área de um quadrado é obtida em função de seu lado. Quadrados de lados iguais têm áreas iguais.
- a soma dos ângulos de um polígono é função do números de lados que ele possua, assim como o número de diagonais.
- o tempo que levamos para percorrer uma distância qualquer é também função da velocidade com que a fazemos.
- A altura que uma bola alcança quando arremessada para o alto é, ente outras coisas, função da força que exercemos sobre ela.

Até mesmo agora que você lê esse texto, não podemos garantir quanto você está entendendo. O que você entende também é função do seu letramento, da sua capacidade de interpretação. A aí, se você tem dificuldades, vai argumentar que essa dificuldade é função da escola que você frequentou, do fato de ter tido uma doença que impediu você frequentar as aulas naquela época, em função da professora que não explicava direito, ou usar quaisquer outras variáveis que tenham alguma relação com essa dificuldade. Viu? O melhor então é aprender logo o que é uma função.

Aqui, para nosso estudo, interessa-nos particularmente, as relações de dependências que possam ser expressas através da álgebra.

Por exemplo:

- a área de um quadrado é obtida em função de seu lado: $A = l^2$.
- a soma dos ângulos de um polígono é função do números de lados que ele possua: $S = 180^o.(n-2)$

- o número de diagonais de um polígono que possui n lados é d = $\frac{n(n-3)}{2}$
- o tempo que levamos para percorrer uma distância qualquer é também função da velocidade com que a fazemos. Na física temos $S = S_o + vt$. (S_o é o espaço inicial, v a velocidade e t, o tempo.)
- A altura que uma bola alcança quando arremessada para o alto é, ente outras coisas, função da força que exercemos sobre ela. Essa altura poderia ser algo como H =

Assim, toda equação a duas variáveis, que é nosso objeto de estudo é, em potencial, uma relação entre duas variáveis e cada uma delas pode ser expressa em função da outra.

Exemplo:

1) Se $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$ ou $x = 5 - y$.

2) Se $2x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - 2x$ ou $x = \frac{2-y}{2}$

Cada uma dessas equações evidencia que o valor de uma variável pode ser determinado, se sabemos o valor da outra. Essa é uma ideia importante para o conceito de função.

Repare que ao dizer que y = 2 - 2x, isso implica que y = 2, se x = 0. E se x = -3, então y = 2 - 2.(-3) = 2 + 6 = 8. Para x = 0,5 o valor de y será igual 1, e assim por diante.

Não trata-se de dizer qual é o valor de x ou mesmo o valor de y. Mas, de compreender que um depende do outro, de que existe uma relação de dependência entre essas duas variáveis.

Por uma questão de convenção, usamos dizer que y é a função. Que y é a variável dependente e x, a variável independente e, cada solução representada por um par ordenado (x,y). Eles se apresentam nesta ordem, também por uma questão de convenção. Não depende de gostarmos ou não.

Ao determinarmos pares de valores (x,y) que atendam a essa equação estaremos determinado as soluções dessa equação. Essas soluções, que são pares ordenados (x,y) podem ser representados num plano (o plano cartesiano) e configurar uma curva. Ou seja, os pontos que atendem àquela função estão todos eles sobre uma curva. Curva[1] esta que pode ser uma reta, uma parábola, uma senoide, entre outras possibilidades.

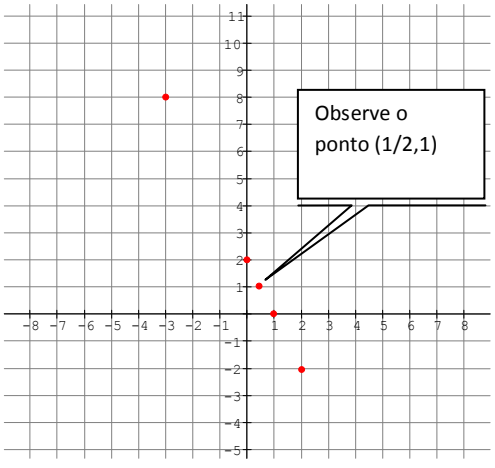
Vejamos.

São soluções da equação y = 2 - 2x:

(0,2); (-3,8); (1/2,1); (-1,4); (2,-2) e muitos outros. São tantos que é impossível dizê-los. Então, resta a possibilidade de visualizá-los pela curva que representam.

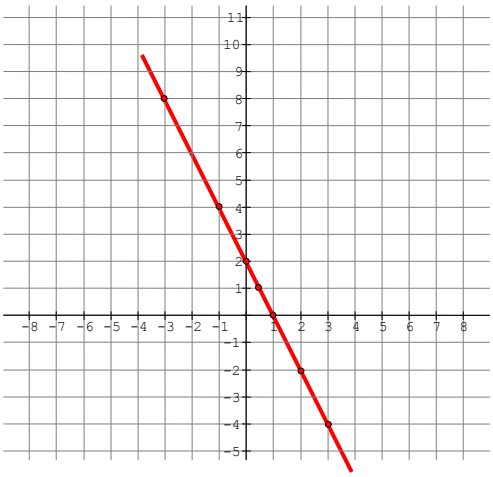
No plano ao lado identificamos algumas soluções.

Observe que outras soluções serão possíveis perceber. O que você pode dizer dos pares (-1,4) e (3,-4)? São pontos que atendem a função y = 2 - 2x.



[1] Aqui, curva tem o sentido de linha, e não, de uma linha que necessariamente tem uma "curvatura".

Se colocarmos mais pontos no plano, que sejam soluções dessa equação, veremos que todos os pontos estão situados sobre uma reta. Dizemos então: A função y = 2 - 2x é uma RETA.



Mude a equação e teremos outra curva.

O ideal é quando conseguimos antecipar e dizer qual será o gráfico apenas pela equação. É isso que a matemática pretende, mas, não a entre em pânico. Sabemos o quanto isso seria difícil. São muitos os modelos de equações e são muitas as curvas possíveis. Mas, isso não impede, no entanto, que saibamos reconhecer algumas. Isso é aceitável e pretendemos conseguir.

Já posso adiantar que uma equação do primeiro grau a duas variáveis, algo como y = ax + b, cujas variáveis são x e y, é sempre uma reta.

Não se mostre surpreso, por exemplo, quando seu professor de Física, colocar a equação S = 3 + 10t e disser que é uma reta. Esta equação é uma equação do primeiro grau a duas variáveis que são S (espaço) e t (tempo), portanto, o que temos é uma função: O espaço percorrido por um móvel em função do tempo.

Você não deve agora pensar que o gráfico seja o percurso que o móvel fez. O gráfico é o conjunto formado por todas as soluções dessa equação. Ele permite-nos perceber, quão distante do ponto de partida, ele encontra-se, mas não a trajetória que ele fez.

Depois de um minuto (t = 1, se nessa equação o tempo está em minuto) ele estará a S = 3 + 10.1 = 13 metros do ponto inicial, caso a unidade de S, nessa equação, seja metro.

Por isso é tão importante dizer em que unidades estão as variáveis. Caso as unidades fossem respectivamente, quilômetro e hora, teríamos: depois de 1 hora ele estaria a 13 km de distância do ponto de partida. Entendeu porque o professor de Física fica nervoso quando vê que você não colocou a unidade?

Pois é. Na Matemática o professor se mostra mais flexível. É uma falha nossa, mas, dá para entender. Na Matemática, nosso objeto é o conceito de função. Na maioria das vezes construímos gráficos e equações, sem preocupação com o contexto em que acontecem. Dizemos apenas: “Seja y uma função definida pela equação y = 3 + 2x.”

Enfim. Repare que não é dito o que é esse y, nem mesmo o que representa esse x. Não é um erro. O que se pretende é que você entenda como se comporta a variável y quando modificamos a variável x. As variáveis y e x podem assumir diferentes papéis dependendo do contexto que se pretenda estudar. Para a Física, y pode ser a Temperatura em função do tempo x – e que geralmente são usadas outras letras: T = 3 + 2t; para a Química, pode representar o tempo de fusão, ou de ração, em função do tempo, ou de um componente que colocamos em uma mistura; para a Biologia, pode estar presente no tamanho da célula em função da idade; para a Geografia, na compreensão da Renda per capta de uma região, que é função do tamanho da população; e de tantas outras situações.

Observe que seu sucesso na leitura desses, e de tantos outros gráficos, passa pela compreensão do conceito de função, portanto, seu estudo não se encerra aqui. Boa pesquisa!