Função Logarítmica

por José Carlos M. Araujo

A história do logaritmo data do século XVII, quando as questões de navegação e astronomia estavam no centro das atenções. Envolvendo personagens como John Napier (1550 – 1617) e Jost Bürgi (1552-1632) os logaritmos começam a merecer atenção pela possibilidade de transformar multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

Calcular logaritmo tem a ver com operar com expoentes. Podemos dizer que logaritmo é um termo adotado para o expoente de uma potência da qual você sabe a base.

Repare: Se $4^3 = 64$, diremos que 3 é logaritmo de 64.

Como $2^6 = 64$, você pode pensar que 6 também é logaritmo de 64? Exatamente. Seis é o logaritmo de 64. O difere as duas situações é a base, que usamos para obter 64. Por isso, quando falamos em logaritmo precisamos definir de qual base estamos falando. Qual é a base desse logaritmo? No primeiro a base é 4, enquanto no segundo, a base é 2.

Diremos, então, que o logaritmo de 64, na base 4, é 3, e o logaritmo de 64, na base 2, é 6. A notação que usaremos será: $\log_4 64$ para o logaritmo de 64 na base 4.

Então: $\log_2 64 = 6$.

Assim, ao perguntar sobre o logaritmo do mesmo 64, agora na base 8, escreveremos $\log_8 64 = 2$, pois, $8^2 = 64$.

A princípio logaritmo é só isso. Não tem por que complicar. Mas temos que reconhecer que até que tivéssemos acesso a uma calculadora, algumas propriedades operatórias foram desenvolvidas para facilitar os cálculos e por conta disso, foi preciso recorrer a outros conceitos da matemática, como a função exponencial, por exemplo.

Enquanto falamos em potências de expoentes inteiros, nosso cálculo é quase mental. No entanto, o que dizer do logaritmo de 5 na base 2? Isso implica saber qual é o expoente que devo atribuir ao número 2 para obter 5 o que à princípio, pode parecer até não ter sentido. Mas sabemos que $2^2 = 4$ e que $2^3 = 8$, portanto, entre os expoentes 2 e 3 deve haver um número x que produza a potência $2^x = 5$. Este será o logaritmo de 5 na base 2.

Quanto é? Bom, usaremos a máquina. Há algum tempo atrás usarávamos uma tabela, ou mesmo um livro só com a sequência de logaritmos. Era isso que nos permitia calcular outros logaritmos.

Estudei consultando esse livro. Chamava-se Tábua dos logaritmos. Pois é, agora só no sebo.

Ah sim, esqueci-me de dizer: $\log_2 5 = 2{,}321928094887362347870319429489 4....$ Esse número é IRRACIONAL, o que significa que o número de casas decimais é infinito. E não há uma parte que se repita como acontece nas dízimas periódicas, como a dízima 0,23723723723723 7..., por exemplo. (esta é RACIONAL)

Mas essa é outra estória que, embora, valha reforçar sempre, não queremos interromper nosso raciocínio.

Apesar de este logaritmo ter muitas (muitas) casas decimais, é usual trabalharmos com aproximações que possuam quatro ou mesmo, duas casas decimais. Então, fiquemos com $\log_2 5 = 2{,}3219$.

Enfim: $2^{2,3219} = 5$. Melhor dizendo, $2^{2,3219} \approx 5$ (aproximadamente cinco).

Verifique na sua máquina: $2^{2,3219} = 4{,}99990263148825821293036690857 65$.

USAMOS AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS.

O fato, de sabermos resolver equações exponenciais, permite que consigamos responder sobre alguns logaritmos que não são inteiros.

Por exemplo: Qual é o logaritmo de 16 na base 8?

Concordemos que isso implica em determinar qual deve ser o expoente de 8, para obtermos o 16.

Pois é, 16 não é potência inteira de 8. E, antes que alguém pense besteira: 8^2 não é 16. Já passamos por isso: $8^2 = 64$. Lembre-se de que o $\log_8 64 = 2$, exatamente porque $8^2 = 8.8 = 64$.

Mas se 16 não é potência inteira de 8, tanto 16 quanto 8 são potências de 2. É assim que vamos sair dessa armadilha.

Repare: vamos chamar o $\log_8 16$ por uma letra. Advinha! Pois é, vamos chamá-lo de x.

Então: $\log_8 16 = x$

Como sabemos: $8^x = 16$. Isto é uma equação exponencial. Para resolvê-la, a ideia é transformar esses dois números, em potências de mesma base. E, como comentei antes, tanto o 16 quanto o 8 são potências de 2. Ou seja: $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$.

Então: $8^x = 16 \Rightarrow (2^3)^x = 2^4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^4$

Mas, potências iguais que possuam bases iguais devem ter expoentes iguais. Então: $3x = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$

Não é tão complicado assim. Claro, que nem sempre poderemos reduzir o problema a uma equação exponencial de bases iguais. Lembra-se do $\log_2 5$?

Vamos tentar chamando de x, esse logaritmo.

Então: $\log_2 5 = x \Rightarrow 2^x = 5$ é uma equação exponencial. Mas não teremos chances de escrever 2 e 5 como potências de uma mesma base com expoentes inteiros, como fizemos com 8 e 16, anteriormente.

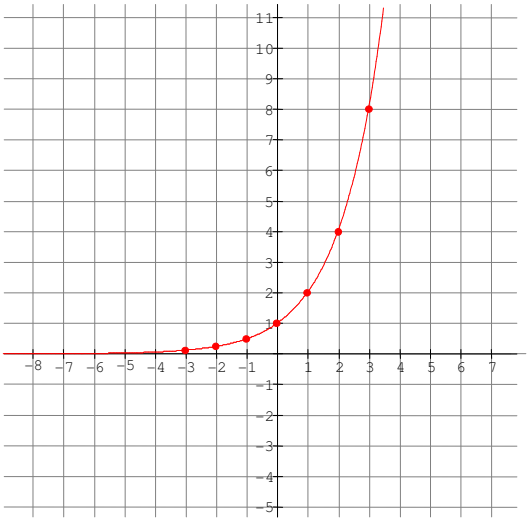
Logo, resta-nos dizer, diante da equação $2^x = 5$, que x é = $\log_2 5$. Agora, me dê uma máquina!

Uma observação:

Se escrevêssemos uma lista com os logaritmos, na base 2, por exemplo, de alguns números reais, já que não seria possível escrever todos, dado que o conjunto dos números reais é infinito e não é enumerável, poderíamos esboçar graficamente qual é o comportamento do logaritmo, por uma curva no plano cartesiano. Teríamos uma função logarítmica.

Repare: Usamos anteriormente a tabela a seguir para representar todos os resultados de potências de 2. Ou seja, representamos todos os $y = 2^x$. Lembra?

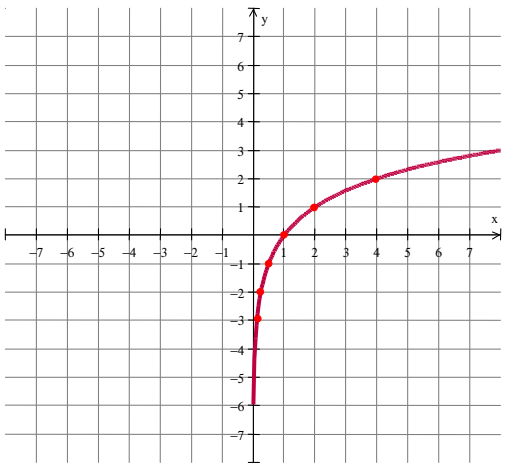
x	y
-3	$2^{-3} = 1/8$
-2	$2^{-2} = 1/4$
-1	$2^{-1} = 1/2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$



Aqui, (-2, ¼) é um ponto da função $y = 2^x$.

Então, não fica difícil perceber que essa tabela nos permite saber, que expoente devo atribuir ao 2 para obter os números 1/8, ¼, ½, 1, 2, e 8. Agora, representando no plano cada um desses pares ordenados $(x, \log_2 x)$, visualizaremos o gráfico da função $y = \log_2 x$.

x	y	justificativa
1/8	-3	Pois $2^{-3} = 1/8$
1/4	-2	Pois $2^{-2} = 1/4$
1/2	-1	Pois $2^{-1} = 1/2$
1	0	Pois $2^0 = 1$
2	1	Pois $2^1 = 2$
4	2	Pois $2^2 = 4$
8	3	Pois $2^3 = 8$



Aqui, (¼, -2) é um ponto da função $y = \log_2 x$.

Observe que essas duas funções $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ tem uma a ver com a outra. Um par ordenado da primeira terá seu inverso, na segunda. Dizemos sobre essa característica das funções que uma é o inverso da outra.