Número Complexo

por José Carlos M. Araujo

Vamos aprender uma nova classe de números. Desde sua alfabetização em Matemática, você vem se deparando com novidades numéricas: primeiro foram os Naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...); depois vieram os números Inteiros (...-3, -2, -2, 0, 1, 2, 3, ...) e à reboque, aquela dificuldade com as operações. Mesmo antes dos Inteiros, você conheceu as frações. Estas, conhecemos como números Racionais, pois são Racionais todos os números que possam ser escritos sob a forma de razão entre dois Inteiros. Assim, até os próprios Inteiros, são números Racionais.

Até aqui, parecia que todo número podia ser expresso pelos Inteiros. Acredite. Durante muito tempo se pensava assim. No entanto, a necessidade, e a curiosidade humana, levaram-nos a conhecer, ou, a criação, do conjunto dos números Irracionais (repare: Irracionais = não Racionais). Definitivamente, há números que não podem ser expressos como razão entre dois Inteiros. E são muitos esses números. O mais famoso? Pi.

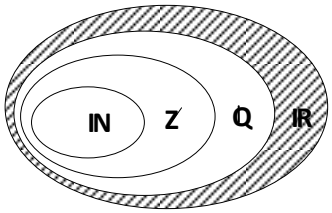
O número Pi, representado por uma letra grega (π), vale "aproximadamente" 3,14159 , mas tem muito mais casas decimais. Infinitas casas decimais. Você já conheceu números que também tinham infinitas casas decimais: as dízimas periódicas. Lembra? 0,3333.... não sai de nossas lembranças. Mas, as dízimas periódicas, podem ser expressas como razão entre dois Inteiros, e, portanto, são números Racionais. Toda dízima periódica tem uma "geratriz". Os Irracionais, não. Eles não podem ser representados como razão entre dois Inteiros.

Além do famoso π, também o número $\sqrt{2}$ é Irracional. Usamos 1,414 como aproximação. Experimente elevar esse número ao quadrado para ver quanto o resultado está próximo de dois. Você irá pensar: Ah, então $\sqrt{2}$ não é 1,414? Não, isso é apenas uma aproximação, e qualquer outro número que seja "escrito" como a raiz quadrada de dois será uma aproximação. Não adiantam os três pontinhos no final dando ideia de continuidade, pois a sequência de dígitos decimais que você tiver escrito, não irá se repetir continuamente. Essa é a diferença entre números Irracionais e as dízimas periódicas, que são Racionais.

Não é tão complicado assim. Os números decimais exatos ou periódicos tem uma fração que os representam. São Racionais. Já os Irracionais, não podem ser representados por um número decimal e, portanto, usamos sempre uma aproximação. Por isso é que aprendemos a somar, por exemplo, $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Fica mais fácil, e mais exato, do que somar suas aproximações na forma decimal.

Bom, estou fazendo aqui um retrospecto do nosso conhecimento sobre os Números Reais. É assim que são chamamos todos os números que me reportei até agora. Sim: os Naturais são números Inteiros, os Inteiros são Racionais, e estes últimos, juntos com os Irracionais, criam um novo conjunto chamado "conjunto dos números Reais".

O diagrama abaixo ilustra melhor essa relação. A parte hachurada representa o conjunto dos Irracionais.



Agora, estamos preparados?

Pois é. Vai acontecer novamente. Já foram criados números diferentes dos Reais. Numa época muito distante, por volta do século XVI, resolvendo equações do terceiro grau, os matemáticos Cardano e Bombelli, perceberam a necessidade, e a possibilidade, de uma operacionalização envolvendo a raiz quadrada de números negativos, que até então eram desconhecidas e discriminadas. Pois é, admitir a raiz quadrada de um número negativo como "número" possibilitou avanços na Matemática e a criação de uma nova classe de números: os números Complexos.

Já perceberam que é costume da Matemática representar números importantes por letras? Então, resolveu-se chamar de i, unidade imaginária[1], o número cujo quadrado fosse igual a -1.

Então temos: $i^2 = -1$. O que equivale a admitir a existência de $i = \sqrt{-1}$. Assim, podemos admitir números como $\sqrt{-4}$. Escrevermos $\sqrt{-4}$ como número complexo 2i.

Repare: $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2i$. Lembre-se de que i é o número cujo quadrado é -1.

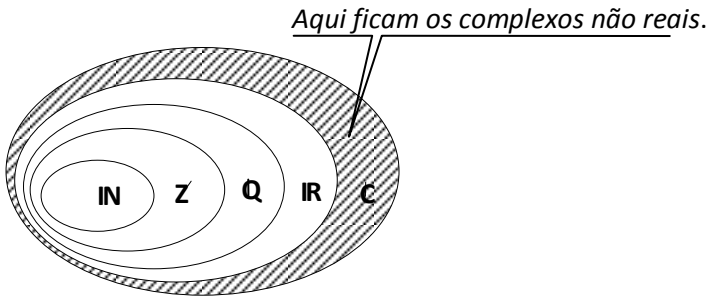
Assim, os complexos são números reconhecidos como tendo a forma z = a + bi. Admitindo a e b como números Reais, teremos ampliado o conjunto dos números além dos Reais.

São exemplos de números complexos: 2i, 3 + 2i, 1 – i, -3i, $\sqrt{2}$ + 3i, -4 – 7i, $\sqrt{2}$i , π + 3i e muitos outros.

Cabem algumas observações:

1) Escolhemos a letra z para fazer referência aos complexos. Dizemos z = 2i, por exemplo.
2) z = 5 + 0.i é um número Real, z = 5. Percebeu? Todo número Real é um número Complexo.
3) z = 0 + 3i é chamado complexo puro, ele só tem a parte imaginária: z = 3i.

Agora, nosso diagrama fica melhor assim:

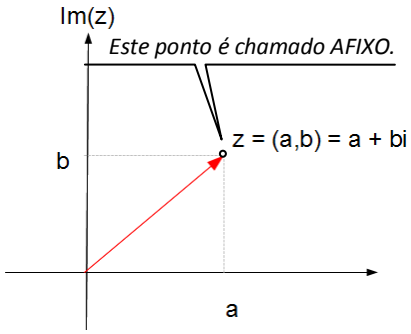


Esta classe de números não tem representação sobre uma reta, como fazemos com os números Reais. Foi preciso pensar em pontos fora da reta para ter sua representação geométrica. No século XVIII, o dinamarquês Caspar Wessel (1745-1818) apresenta uma primeira tentativa de representar geometricamente os números complexos. Ele idealiza uma correspondência bijectiva entre esses e os pontos do plano cartesiano. Ou seja, cada número complexo é representado por um ponto do plano cartesiano e vice-versa. No entanto, só por volta de 1806, já século XIX, essa representação ganha o devido respeito ao ser publicado em francês por Jean Argand (1768-1822). Por este motivo, esta representação ficou, indevidamente, ligada ao nome de Argand.

[1] O símbolo i, para a representação de $\sqrt{-1}$, foi criado por Leonard Euler, mas o aceite só ocorreu após o seu uso por Gauss (1777-1855) em 1801.

É isso. Simples assim. A representação dos números complexos é possível no plano cartesiano que agora é tratado como Plano de Argand-Gauss. Sim, Gauss (1777-1855), também participou dessa ideia. Como resultado dessa representação, o número complexo também pode ser interpretado por um par ordenado.

Podemos representar o complexo $z = a + bi$ por $z = (a,b)$. Sobre o eixo das ordenadas representar-se-á a parte imaginária do número complexo.



Voltaremos a essa representação mais adiante. Agora, vamos ver como iremos operacionalizar com esses novos números.

Fácil. Soma, subtração, produto e até mesmo a potência, não guardam grandes segredos. Comportam-se como as expressões algébricas: somamos ou subtraímos somente termos semelhantes, e usamos a distributividade quando multiplicamos duas somas.

Assim como a expressão $(x + 2y)$ pode ser somada com $(3x – 5y)$ e resultar em $4x – 3y$, também os números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 – 5i$ devem ser somados: $(1 + 2i) + (3 – 5i) = 1 + 2i + 3 – 5i = 4 – 3i$.

Analogamente, se $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 – 5i$, então teremos:

$z_1 – z_2 = (1 + 2i) – (3 – 5i) = 1 + 2i – 3 + 5i = -2 + 7i$

$z_1 . z_2 = (1 + 2i) . (3 – 5i) = 3 – 5i + 6i – 10i^2 = 3 – 5i + 6i + 10 = 13 + i$ (substituímos i^2 por -1)

$(z_1)^2 = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i – 4 = -3 + 4i$

Quadrado de uma soma. Você pode fazer (1+2i).(1+2i), se quiser.

Agora, a divisão merece uma maior atenção. E, para compreender a divisão entre dois números complexos precisaremos conhecer o conjugado de um número complexo. Representaremos por $\overline{z}$ o conjugado do número z. Por definição, $\overline{z} = a – bi$.

Então, $\overline{z} = -3 + 2i$ é o conjugado de $z = -3 – 2i$. Uma propriedade importante é que: se você multiplicar um número complexo $z = a + bi$ pelo seu conjugado, encontrará o número real $(a^2 + b^2)$. Observe[2]:

Nº complexo	Seu conjugado	Produto de z por $\overline{z}$
$z_1 = -1 + 2i$	$\overline{z_1} = -1 – 2i$	$(-1 + 2i).(-1 – 2i) = 1 – 4i^2 = 1 + 4 = 5$
$z_2 = 3 – 5i$	$\overline{z_2} = 3 + 5i$	$(3 – 5i) . (3 + 5i) = 9 – 25i^2 = 1 + 25 = 26$
$Z_3 = 2 + 4i$	$\overline{z_3} = 2 – 4i$	$(2 + 4i).(2 – 4i) = 4 – 16i^2 = 4 + 16 = 17$

[2] *(a+bi).(a-bi) é um produto notável: produto da soma pela diferença dos mesmos números. Assim* $(a+bi).(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2- b^2.i^2= a^2+b^2$, *pois,* $i^2= -1$.

DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS.

Devemos entender assim: Diante de uma divisão de dois complexos, queremos saber, que número complexo resulta. A solução será um número complexo e, portanto, um número que pode ser escrito na forma z = a + bi.

Observe que, quando a divisão do complexo é por um número real, não há problemas.

Exemplos: $\frac{6-3i}{2} = \frac{6}{2} - \frac{3}{2}i = 3 - \frac{3}{2}i$ e $\frac{6-3i}{-3} = \frac{6}{-3} - \frac{3}{-3}i = -2 + i$

Percebeu? E fácil conduzir essa divisão até um número complexo. O problema é quando o divisor é um complexo não real, pois, queremos expressar o resultado da divisão como um número complexo, ou seja, queremos identificar números reais a e b tais que a resposta possa ser apresentado na forma z = a + bi.

Como vimos anteriormente, o produto de um número complexo pelo seu conjugado é um número real. Isso, associado a certeza de que uma fração não se altera se multiplicamos seu numerador e seu denominador por uma mesmo número (diferente de zero, claro), o problema pode ser resolvido. Querendo que o denominador seja um úmero real, conseguiremos isso multiplicando o denominador pelo seu conjugado. No entanto, também o numerador deve ser multiplicado pelo mesmo número, para que a fração não seja alterada. Então é isso. Multiplicaremos os dois, numerador e denominador, pelo conjugado do denominador para termos, no denominador, um número um real, visto que um número multiplicado por seu conjugado é um número real.

Vejamos. Queremos dividir o número complexo 6 – 3i pelo número 2 + i.

Teremos que fazer movimentações algébricas e transformar a fração $\frac{6-3i}{2+i}$ em um único número complexo z = a + bi. Portanto, façamos o que descrevemos no parágrafo anterior.

$$\frac{6-3i}{2+i} = \frac{(6-3i).(2-i)}{(2+i).(2-i)} = \frac{12-6i-6i+3i^2}{4-i^2} = \frac{12-12i-3}{4+1} = \frac{9-12i}{5} = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$$

Conjugado de (2 + i).

Repare que ao conseguir a igualdade $\frac{6-3i}{2+i} = \frac{9-12i}{5}$ estaremos em condições de identificar quais valores de a e b respondem a divisão proposta.

$$\frac{6-3i}{2+i} = \frac{9-12i}{5} = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$$

Na forma de par ordenado:

$Z = \left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$

.

Pode ficar a impressão de que os números Complexos são uma invenção do homem. Não quero desapontá-lo, mas todos os números são invenção do homem. Você só estava mais acostumado com os números Reais.